التمرين الأول:

من أجل كل عدد صحيح n نضع : $A(n)=n^2-n+2007$

1) أ – حلل إلى جداء عوامل أولية العددان 4014 و $A(1)$.

ب – أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014 و $A(1)$.

2) بين أنه إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$ ، وهل العكس صحيح ؟ برر إجابتك .

3) تحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n : $(n+1)^2-(n+1)+2007=(n^2-n+2007)+2n$

4) بين أنه إذا كان $A(n)$ عدد فردي فإن $A(n+1)$ عدد فردي .

5) عين الاعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A(n)$ يقسم $A(1)$.

التمرين الثاني:

عين في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح الوحيد مع التبرير

1) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y'+3y=0$

$y=Ce^{\frac{1}{3}x}$	$y=Ce^{-\frac{1}{3}x}$	$y=Ce^{3x}$	$y=Ce^{-3x}$

2) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y'-2y=6$

$y=Ce^{-\frac{1}{2}x}+3$	$y=Ce^{2x}-3$	$y=Ce^{\frac{1}{2}x}+3$	$y=Ce^{2x}+3$

3) العدد $3-\ln(e^2)+e$ يساوي

$1+e$	2	0	$2-e$

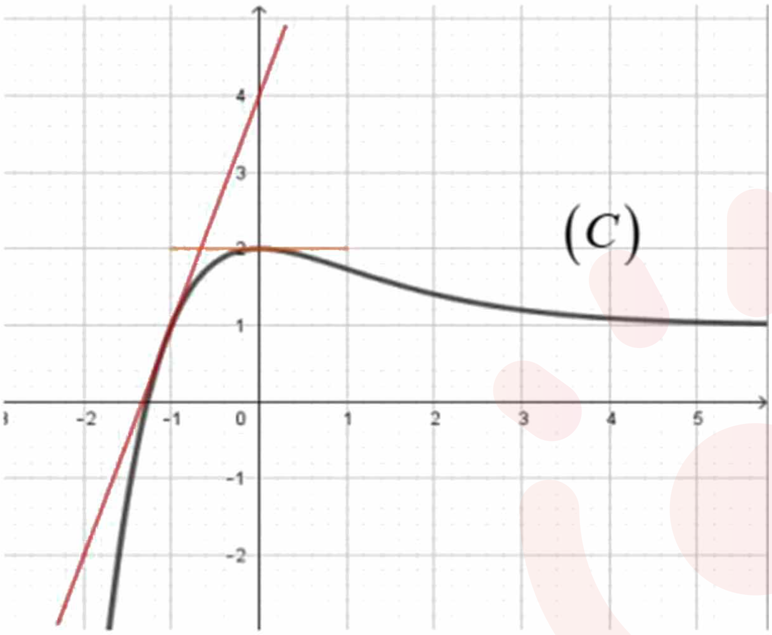
4) العدد $e^{-3\ln(2)}$ يساوي

$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	8	1

5) حلول المعادلة $e^{2x}-5e^x+6=0$ هي

$\{e^2;e^3\}$	$\left\{\ln\left(\frac{1}{2}\right);\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$	$\{\ln(2);\ln(3)\}$	$\{2;3\}$

التمرين الثالث:



المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، المنحنى (C) في الشكل هو لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ حيث a و b عددان حقيقيان .

1. أ – بقراءة بيانية عين $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النهاية الأخيرة بيانيا .

ب – عين كل من : $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(1)$.

ج – اعتمادا على ما سبق جد قيمة كل من a و b ثم استنتج عبارة $f(x)$.

2. أ – بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1,4\prec\alpha\prec-1,2$.

ب – استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

3. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=(|x|+1)e^{-x}+1$

- احسب كلا من $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{h(x)-2}{x}$ و $\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{h(x)-2}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسيا ، (نقبل أن : $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}=-1$)

نضع فيما يلي: $f(x)=(x+1)e^{-x}+1$ ونعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x)=x-\frac{x+2}{e^{x}}$ و (C_g) منحناها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm)$

1. أ – أحسب كلا من $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

ب – بين أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة g بجوار $(+\infty)$.

2. أ – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x)=f(x)$

ب – استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها 1 - .

4. بين أن $g(\alpha)=\alpha+1+\frac{1}{\alpha+1}$ ثم استنتج حصرا للعدد $g(\alpha)$.

5. أ -أحسب $g(0)$ ثم أنشئ كلا من (Δ) ، (T) والمنحنى (C_g) .

ب – m وسيط حقيقي ، ناقش حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $g(x)=x+m$.

Nafouz

التمرين الأول:

من أجل كل عدد صحيح n نضع : $A(n)=n^2-n+2007$

1) أ – تحليل إلى جداء عوامل أولية للعددين 4014 و $A(1)$:

$$A(1)=(1)^2-1+2007=2007=3^2\times 223$$
$$4014=2A(1)=2\times 3^2\times 223$$

ب –إيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 4014 و $A(1)$:

$$p\gcd(A(1);4014)=p\gcd(A(1);2A(1))=A(1)=2007$$

2) التبين أنه إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$:

لدينا : 3 يقسم n وبالتالي 3 يقسم n^2 و3 يقسم n وبالتالي 3 يقسم $-n$

ومن جهة اخرى 3 يقسم 2007 ومنه : إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $n^2-n+2007$ أي : إذا كان 3 يقسم n فإن 3 يقسم $A(n)$

العكس غير صحيح لأن : $A(4)=(4)^2-4+2007=2019$ أي أن 3 يقسم $A(n)$ من أجل $n=4$ لكن 3 لا يقسم 4 .

3) التحقق أنه من أجل كل عدد صحيح n : $(n+1)^2-(n+1)+2007=(n^2-n+2007)+2n$

$$\begin{aligned}(n+1)^2-(n+1)+2007&=\left[n^2+2n+1\right]-(n+1)+2007\\&=n^2+2n-n+1-1+2007\\&=n^2+n+2007\\&=(n-n+2007)+2n\end{aligned}$$

4) التبين أنه إذا كان $A(n)$ عدد فردي فإن $A(n+1)$ عدد فردي :

إذا كان $A(n)$ فردي فإنه يوجد عدد صحيح k : $A(n)=2k+1$

لدينا : $A(n)=n^2-n+2007$ ومنه : $A(n+1)=(n+1)^2-(n+1)+2007$ أي أن :

$$A(n+1)=A(n)+2n=2k+1+2n=2(k+n)+1$$

نضع : $k'=k+n$ ومنه : $A(n+1)=2k'+1$ حيث k' عدد صحيح

الخلاصة : إذا كان $A(n)$ عدد فردي فإن $A(n+1)$ عددفردي كذلك .

5) تعين الاعداد الصحيحة n التي يكون من أجلها $A(n)$ يقسم $A(1)$:

$A(n)$ يقسم $A(1)$ معناه $n^2-n+2007$ يقسم 2007 ونعلم أن مجموعة قواسم 2007 هي :

$\{-2007;-669;-223;-9;-3;-1;1;3;9;223;669;2007\}$ ومنه

$n^2-n+2007=$	-2007	-669	-223	-9	-3	-1	1	3	9	223	669	2007

ومنه $n=0$ أو $n=1$

التمرين الثاني:

تعين في كل حالة من الحالات التالية الاقتراح الوحيد مع التبرير

1) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y'+3y=0$ أي $y'=-3y$ حلها هو $y=Ce^{-3x}$

2) مجموعة حلول المعادلة التفاضلية $y'-2y=6$ أي $y'=2y+6$ حلها هو $y=Ce^{2x}-\frac{6}{2}$ أي $y=Ce^{2x}-3$

3) العدد $3-\ln(e^2)+e$ يساوي $\boxed{1+e}$ لأن : $3-\ln(e^2)+e=3-2+e=\boxed{1+e}$

4) العدد $e^{-3\ln(2)}$ يساوي لأن : $e^{-3\ln(2)}=e^{\ln(2)^{-3}}=2^{-3}=\frac{1}{2^3}$

5) حلول المعادلة $e^{2x}-5e^x+6=0$ هي $\{\ln(2);\ln(3)\}$ لأن : بوضع $t=e^x$ تصبح المعادلة $t^2-5t+6=0$

نحسب المميز : $\Delta=(-5)^2-4(1)(6)=25-24=1$ ومنه تقبل حلين متمايزين هما : $t_1=3$ و $t_2=2$

بالعودة الى المتغير الأصلي : $e^x=3\Rightarrow x=\ln(3)$ ، $e^x=2\Rightarrow x=\ln(2)$

التمرين الثالث:

☺ المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، المنحنى (C) في الشكل هو لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ حيث a و b عددان حقيقيان .

1. أ – بقراءة بيانية تعين $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و تفسير النهاية الأخيرة بيانيا .

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(ax+b)e^{-x}+1=-\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(ax+b)e^{-x}+1=1$$

تفسير النهاية $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ بيانيا :

المستقيم ذو المعادلة $y=1$ هو مستقسم مقارب افقي موازي لمحور الفواصل بجوار $(+\infty)$.

ب – تعين كل من : $f(0)$ ، $f(1)$ ، $f'(0)$ ، $f'(-1)$.

$f(-1)=1$ ، $f(0)=2$

- $f'(0)$ هو معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 0 وهو افقي وعليه: $f'(0)=0$

- $f'(-1)$ هو معامل توجيه المماس في النقطة التي فاصلتها 1- والمار بالنقطتين $(0;4)$ و $(-2;-2)$ وعليه :

$$f'(-1)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-(-2)}{0-(-2)}=\frac{6}{2}=3$$

ج – اعتمادا على ما سبق ايجاد قيمة كل من a و b و استنتاج عبارة $f(x)$:

لدينا : $\begin{cases} f(0)=2 \\ f(-1)=1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} (a(0)+b)e^{0}+1=2 \\ (a(-1)+b)e^{-1}+1=1 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} b+1=2 \\ (-a+b)e+1=1 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} b=1 \\ (-a+1)e=0 \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases}$

.2 أ – تبيان أن المعادلة تقبل $f(x)=0$ حلا وحيدا α حيث $-1{,}4\prec\alpha\prec-1{,}2$:

لدينا : f مستمرة علي $]-1.4;-1.2[$ و $f(-1{,}2)=0{,}33$ و $f(-1{,}4)=-0{,}62$ و $f(-1{,}2)\times f(-1{,}4)\prec 0$
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1{,}4\prec\alpha\prec-1{,}2$

ب – استنتاج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$:

نلخص النتائج في الجدول التالى :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	

.3 نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=(|x|+1)e^{-x}+1$

- **حساب كلا من $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{h(x)-2}{x}$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{h(x)-2}{x}$ ثم تفسر النتيجة هندسيا:**

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{h(x)-2}{x}=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left[\frac{(|x|+1)e^{-x}+1-2}{x}\right]=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\frac{(x+1)e^{-x}-1}{x}\right)=\lim_{x \xrightarrow{>} 0}\left(\frac{\cancel{x}e^{-x}}{\cancel{x}}+\frac{e^{-x}-1}{x}\right)=1-1=0$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{h(x)-2}{x}=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left[\frac{(|x|+1)e^{-x}+1-2}{x}\right]=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left(\frac{(-x+1)e^{-x}-1}{x}\right)=\lim_{x \xrightarrow{<} 0}\left(\frac{-\cancel{x}e^{-x}}{\cancel{x}}+\frac{e^{-x}-1}{x}\right)=-2$$

التفسير الهندسي :

الدالة لا تقبل الاشتقاق عند النقطة التي فاصلتها 0 ومنحناها يقبل يقبل نصفى مماسي معامل توجيهها 0 و 2- .

نضع فيما يلي: $f(x)=(x+1)e^{-x}+1$ ونعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x)=x-\frac{x+2}{e^x}$ و
(C_g) منحناها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm)$

1. أ – حساب كلا من $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{x+2}{e^x}\right)=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{1+\frac{2}{x}}{e^x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x+2}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)=+\infty$$

ب – تبيان أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة g بجوار $(+\infty)$.

بما أن : $\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{x+2}{e^x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)=0$

فإن المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة g بجوار $(+\infty)$.

2. أ – تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g'(x)=f(x)$:

g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x)=\left(x-\frac{x+2}{e^x}\right)'=\left(x-(x+2)e^{-x}\right)'=1-\left((1-x-2)e^{-x}\right)=1-(-x-1)e^{-x}=f(x)$$

ب – استنتاج اتجاه تغير الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها :

لدينا من السؤال السابق : $g'(x)=f(x)$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f(x)$ وعليه :

- $g'(x)=0$ تكافئ $f(x)=0$ ومنه $x=\alpha$.
- $g'(x)\prec 0$ تكافئ $f(x)\prec 0$ ومنه $x\in]-\infty;\alpha[$ ومنه g متناقصة تماما على المجال $]-\infty;\alpha[$
- $g'(x)\succ 0$ تكافئ $f(x)\succ 0$ ومنه $x\in]\alpha;+\infty[$ ومنه g متزايدة تماما عل المجال $]\alpha;+\infty[$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	$+\infty$

.3 كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_g) في النقطة التي فاصلتها 1 - :

$$(\Delta): y = g'(-1)(x-(-1)) + g(1)$$

ولدينا : $g'(-1) = f(-1) = 1$ وكذلك $g(-1) = -1-e$ ومنه : $(\Delta): y = 1(x+1) - 1 - e$ ومنه : $(\Delta): y = x - e$

.4 تبيان أن $g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}$ و استنتاج حصرا للعدد $g(\alpha)$.

لدينا : $g(\alpha) = \alpha - (\alpha+2)e^{-\alpha}$

وكذلك لدينا : $f(\alpha) = 0$ تكافئ $(\alpha+1)e^{-\alpha} + 1 = 0$ نستخرج منها قيمة $e^{-\alpha}$ أي : $e^{-\alpha} = \frac{-1}{\alpha+1}$ ونعوضها في $g(\alpha)$

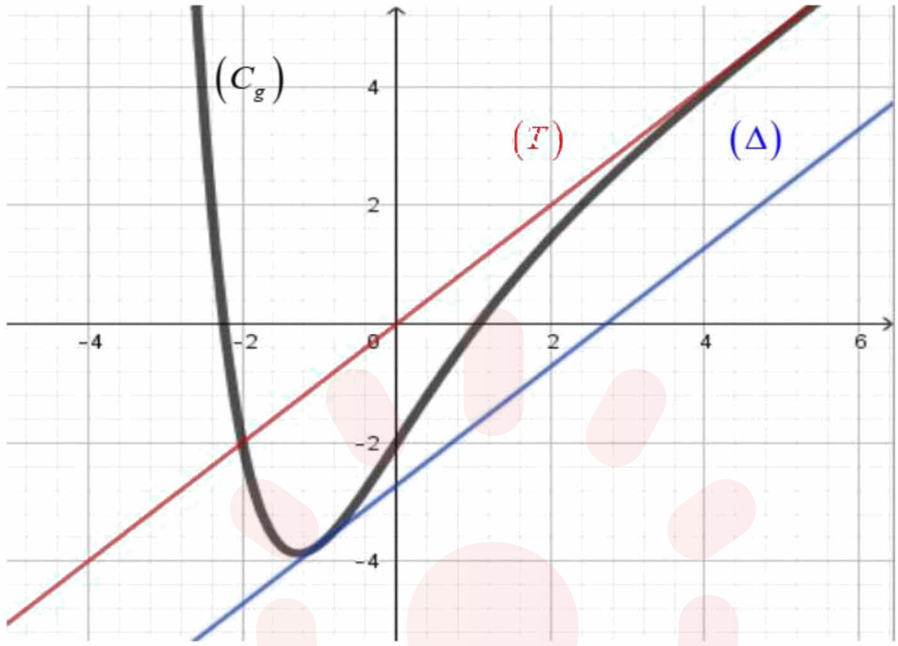
نجد :

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= \alpha - (\alpha+2)\frac{-1}{\alpha+1} \\ &= \alpha + \frac{(\alpha+1)+1}{\alpha+1} \\ &= \alpha + \frac{\alpha+1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+1} \\ &= \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1} \end{aligned}$$

ومنه : $\boxed{g(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha+1}}$

.5 **أ - حساب $g(0)$ ثم أنشاء كلا من (Δ) ، (T) والمنحنى (C_g) :** $g(0) = 0 - \frac{0+2}{e^0} = 0 - \frac{0+2}{1} = -2$

الانشاء :



ب – المناقشة حسب قيم m عدد و إشارة حلول المعادلة $g(x)=x+m$:

حلول المعادلة $g(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_g) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+m$ والموازي للمستقيمين (Δ) و (T)

- من أجل $m\in]-\infty;-e[$ المعادلة ليس لها حلول .
- من أجل $m=-e$ المعادلة لها حل مضاعف سالب تماما
- من أجل $m\in]-e;-2[$ المعادلة لها حلان سالبان تماما .
- من أجل $m=-2$ المعادلة لها حلان أحدهما سالب و الاخر معدوم .
- من أجل $m\in]-2;0[$ المعادلة لها حلان مختلفان في الإشارة .
- من أجل $m\in]0;+\infty[$ المعادلة لها حل واحد سالب تماما .